DIE METHODEN

der

Transformation der Differential-Ausdrücke

der

ersten, zweiten und dritten Ordnung

und die der

einfachen, doppelten und dreifachen Integrale durch die Einführung neuer Veränderlichen

sowie die

Anwendung dieser Transformation in der Geometrie,

Eine von der philosophischen Fakultät der Universität zu Rostock

genehmigte

Promotionsschrift

von

Ludwig Erményi.

(Hiezu 1 Figurentafel.)

Wien 1875.

Im Selbstverlage des Verfassers. — Druck von R. v. Waldheim.

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41553624_0082

I.

Die Beziehungen zwischen veränderlichen und constanten Grössen, deren Untersuchung den Gegenstand der höheren Analysis bildet, bedingen zunächst die nothwendige Unterscheidung zwischen abhängig und unabhängig veränderlichen Grössen, indem diese jeden beliebigen mit ihrer Natur verträglichen Werth annehmen können, während die Werthe jener durch die Werthe der unabhängig veränderlichen bestimmt werden. Diese Unterscheidung zwischen abhängig und unabhängig Veränderlichen hat bei den Operationen des Differenzirens zur weiteren unmittelbaren Folge, dass das Differential der unabhängig veränderlichen Grösse als constant betrachtet werden muss. In der aus $y = f(x)$ folgenden Gleichung $dy = f'(x)\,dx$ ist in der That das Inkrement dx der unabhängig Veränderlichen eine von x unabhängige Grösse von willkürlichem Werthe und erhält dadurch den Werth einer constanten Grösse. Anders ist dies mit dem Differential dy der abhängigen Veränderlichen, welches, da sein Ausdruck $f'(x)\,dx$ einen von x abhängigen Factor $f'(x)$ einschliesst, von x unabhängig wird und hiedurch das Gepräge einer veränderlichen Grösse annimmt. Dieser Unterschied tritt namentlich bei der Entwicklung der höheren Differentiation zu Tage, indem hiebei die höheren Differentialien der unabhängig Veränderlichen gleich Null gesetzt werden.

Es tritt nun nicht selten bei der Untersuchung gegebener oder gefundener Differential-Ausdrücke das Bedürfniss ein, an die Stelle der bisher als unabhängig veränderlich betrachteten Grösse eine andere treten zu lassen, wonach somit die Aufgabe entsteht, diese Transformation durch die Einführung neuer Veränderlichen an den gewonnenen Ausdrücken auszuführen. Es soll, um diese Aufgabe zunächst im Allgemeinen zu erläutern, die Gleichung

$$1) \quad \ldots \quad F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \frac{d^3y}{dx^3}, \ldots\right) = 0,$$

in welcher x als die unabhängig veränderliche Grösse, und y als deren Function betrachtet wurde, so transformirt werden, dass x aufhört, die

unabhängig Veränderliche zu sein, und dafür die Grösse t als solche eingeführt wird, wobei natürlich deren Zusammenhang mit einer der Grössen x, y, oder mit beiden gegeben sein muss.

Nachdem der ursprüngliche Zusammenhang zwischen den Grössen x und y nicht aufgegeben wird, so ist jetzt y als eine Function von x, $y = f(x)$, und x als Function von t zu betrachten $x = \varphi(t)$, wobei also y im Grunde doch nur eine Function von t ist, und es entsteht die Aufgabe, den Differential-Quotienten $\frac{dy}{dt}$ dieser Function in Bezug auf die unabhängig Veränderliche t zu entwickeln. Lässt man zu diesem Ende t um Δt zu nehmen, so werden auch x und y beziehungsweise die Aenderungen Δx und Δy erleiden. Aus der Gleichung $y = f(x)$ folgt zunächst $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$, folglich ist

$$\frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta t},$$

eine Gleichung, welcher man auch die Form

$$\frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \cdot \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

geben kann. Beim unendlichen Abnehmen von Δt wird, wie aus dem Begriffe des Differential-Quotienten unmittelbar erhellt:

$$\lim \frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{dy}{dt}, \quad \lim \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx},$$

und

$$\lim \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt};$$

hiemit verwandelt sich die obige Gleichung in die folgende:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt}, \text{ woraus}$$

$$2) \ldots\ldots\ldots\ldots \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} \text{ folgt.}$$

Dieser Ausdruck ist nun in die Gleichung 1 an Stelle von $\frac{dy}{dx}$ zu setzen.

Wird die Gleichung 2 neuerdings nach t differenzirt, wobei dt als constant zu betrachten ist, und wobei zu beachten ist, dass die Grösse $\frac{dy}{dx}$ als Function von x nach der eben gefundenen Regel zu differenziren ist, so erhält man:

$$\frac{d^2y}{dx^2}\,\frac{dx}{dt} = \frac{\frac{dx}{dt}\,\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\,\frac{d^2x}{dt^2}}{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2}, \text{ woraus}$$

$$3) \ldots\ldots\ldots \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{dx}{dt}\,\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\,\frac{d^2x}{dt^2}}{\left(\frac{dx}{dt}\right)^3},$$

welcher Ausdruck weiters statt $\frac{d^2y}{dx^2}$ in die Gleichung 2 zu substituiren kommt.

Durch fortgesetzte Differentiation auch dieser zuletzt gefundenen Gleichung ergibt sich endlich ohne Schwierigkeit der Ausdruck:

$$4) \frac{d^3y}{dx^3} = \frac{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 \frac{d^3y}{dt^3} - 3\,\frac{dx}{dt}\,\frac{d^2x}{dt^2}\,\frac{d^2y}{dt^2} + 3\,\frac{dy}{dt}\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2 - \frac{dx}{dt}\,\frac{dy}{dt}\,\frac{d^3x}{dt^3}}{\left(\frac{dx}{dt}\right)^5}.$$

Die in diesen Ausdrücken erscheinenden Differential-Quotienten von x und y in Bezug auf die neue unabhängig Veränderliche t sind aus jenen Gleichungen abzuleiten, welche den Zusammenhang ausdrücken, in welchem t zu den ursprünglich vorhandenen Veränderlichen steht.

In speciellen Fällen nehmen diese Ausdrücke je nach der gestellten Bedingung eine mehr oder weniger einfache Form an; so kann verlangt sein, dass y als die neue unabhängig Veränderliche und x als die von y abhängig Variable betrachtet werde. In diesem Falle ist $t = y$, folglich:

$$\frac{dy}{dt} = 1, \text{ und } \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d^3y}{dt^3} = \ldots\ldots 0,$$

wodurch die oben genannten Ausdrücke, wenn dabei allenthalben, statt t, y geschrieben wird:

$$5) \ldots \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}; \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{\frac{d^2x}{dy^2}}{\left(\frac{dx}{dy}\right)^3}; \frac{d^3y}{dx^3} = \frac{3\left(\frac{d^2x}{dy^2}\right)^2 - \frac{dx}{dy}\,\frac{d^3x}{dy^3}}{\left(\frac{dx}{dy}\right)^5}.$$

Wäre beispielsweise gegeben:

$$y = \sin x, \text{ woraus } \frac{dy}{dx} = \cos x \text{ folgt,}$$

und wobei x die unabhängig Veränderliche ist, so hat man, wenn

diese Eigenschaft auf y übertragen werden soll, statt $\frac{dy}{dx}$ zu setzen $\frac{1}{\frac{dy}{dx}}$, wonach die letzte Gleichung übergeht in:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}},$$

das ist, weil $x = \text{arc sin } y$:

$$\frac{d \,.\, \text{arc sin } y}{dy} = \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}}.$$

Ebenso fände man für

$$y = l\, x, \text{ woraus } \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x} \text{ folgt,}$$

bei Annahme, dass y die unabhängig Veränderliche ist,

$$\frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{x} \text{ oder } \frac{dx}{dy} = x,$$

das heisst, indem man für x seinen Werth, ausgedrückt durch y, nämlich e^y setzt,

$$\frac{d \,.\, e^y}{dy} = e^y.$$

Durch dieses Verfahren ist somit zugleich ein Mittel an die Hand geboten, um die Differentialien aller umgekehrten Functionen zu entwickeln, welches auch auf die Darstellung der höheren Differentialien angewendet werden kann.

Ist die neue unabhängig Veränderliche t mit x durch die Gleichung $\varphi\,(x, t) = 0$ verbunden, so werden aus dieser die Werthe von $\frac{dx}{dt}$, $\frac{d^2x}{dt^2}, \frac{d^3x}{dt^3}$ etc. abgeleitet und in die allgemeinen Ausdrücke 2, 3, 4 substituirt; werden endlich diese für $\frac{dx}{dy}, \frac{d^2x}{dy^2}$ . . . nebst dem Werthe von x in Function von t in die gegebene Gleichung 1 eingesetzt, so erhält man die gesuchte Gleichung $F = 0$, in welcher nur noch y, t und die Differential-Quotienten von y nach t erscheinen.

Für den Fall, als die Gleichung $\psi\,(y, t) = 0$ als Bedingungsgleichung gegeben wäre, so würde man ganz in derselben Weise die Grösse y aus 1 hinausschaffen können.

Ist endlich die Gleichung in der Form von $\Phi\ (x,\ y,\ t) = 0$ zwischen allen 3 Veränderlichen gegeben, so werden aus derselben — x und y als Functionen von t angesehen — die Werthe von x, $\frac{dx}{dt}$, $\frac{d^2x}{dt^2}$ . . . gezogen, ausgedrückt durch y, t, $\frac{dy}{dt}, \frac{d^2y}{dt^2}$ . . . und in die allgemeinen Ausdrücke 2, 3, 4 substituirt, welche sodann statt $\frac{dx}{dy}, \frac{d^2x}{dy^2}$ etc. in 1 einzusetzen sind.

Es kommt jedoch auch vor, dass die Gleichung, welche den Zusammenhang zwischen den ursprünglichen Veränderlichen und der neuen unabhängig Variablen ausdrückt, auch Differential-Quotienten von x und y nach t enthält, oder mit anderen Worten, dass irgend eine Function der ursprünglichen Differentialien als neues constantes Differential betrachtet werden soll. Das Verfahren bleibt im Wesentlichen dasselbe. Um dies zu erläutern, sei in dem Ausdrucke für den Krümmungshalbmesser einer Curve:

$$\rho = \pm \frac{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}}{\frac{d^2y}{dx^2}},$$

in welchem dx das constante Differential ist, durch die Einführung der neuen Veränderlichen s, beziehungsweise des Differentials ds des Bogens die nöthige Transformation vorzunehmen. Die neue Veränderliche hängt mit der Ursprünglichen zusammen durch $1 = \left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2$ oder $ds^2 = dx^2 + dy^2$. Substituirt man in den oberen Ausdruck für den Halbmesser für $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}$ die früher gefundenen allgemeinen Ausdrücke 2, 3, so erhält man, wenn s statt t geschrieben wird:

$$\rho = \pm \frac{\left[\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2\right]^{3/2}}{\frac{dx}{ds}\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{ds}\frac{d^2x}{ds^2}},$$

welcher Ausdruck mit Rücksicht auf die Bedingung

$$1 = \left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 \text{ in:}$$

$$\rho + \pm \frac{1}{\frac{dx}{ds}\frac{d^2y}{ds^2} - \frac{dy}{ds}\frac{d^2x}{ds^2}} = \pm \frac{ds^3}{dx\ d^2y - dy\ d^2x}$$

sich verwandelt, und in welchem noch kein Differential constant ist. Wird jedoch die Gleichung $ds^2 = dx^2 + dy^2$ unter der Voraussetzung, dass s die unabhängig Veränderliche ist, also ds constant, so erhält man

$$0 = dx\ d^2x + dy\ d^2y,$$

mit Hilfe welcher Gleichung man aus der letzt gefundenen erhält, je nachdem d^2x oder d^2y eliminirt wird:

$$\rho = \pm \frac{dx\ ds}{d^2y} = \mp \frac{dy\ ds}{d^2x}.$$

In dem ursprünglich gegebenen Ausdrucke für den Krümmungshalbmesser war sonach das Differential dx der Abscisse, in letzterem ist jenes ds des Bogens als constant vorausgesetzt.

Nicht selten kommt endlich der Fall vor, dass beide ursprüngliche Veränderliche x, y durch zwei neue r, t ersetzt werden sollen, von welchen t die unabhängig Veränderliche sein mag. In diesem Falle werden 2 Gleichungen gegeben sein, welche den Zusammenhang zwischen x, y und r, t vermitteln, und aus welchen die Werthe von

$$\frac{dx}{dt}, \frac{d^2x}{dt^2} \ldots \text{ und } \frac{dy}{dt} \frac{d^2y}{dt^2} \ldots$$

gezogen werden können.

Es seien beispielsweise in dem vorhin gefundenen Ausdruck für den Krümmungshalbmesser, in welchem dx constant ist, die neuen Veränderlichen r, u einzuführen, welche mit x und y durch die Gleichungen:

$$x = r \cos u,\ y = r \sin w$$

verknüpft sind. Wird u als unabhängig Veränderliche gewählt, wodurch r als Function von u erklärt wird, so findet man:

$$\frac{dx}{du} = \frac{dr}{du} \cos u - r \sin u, \frac{d^2x}{du^2} = \frac{d^2r}{du^2} \cos u - 2 \frac{dr}{du} \sin u - r \cos u,$$

$$\frac{dy}{du} = \frac{dr}{du} \sin u + r \cos u, \frac{d^2y}{du^2} = \frac{d^2r}{du^2} \sin u + 2 \frac{dr}{du} \cos u - r \sin u,$$

und erhält durch Substitution dieser Ausdrücke in 2 und 3 nach gehörig vorgenommener Reduction:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dr}{du} \sin u + r \cos u}{\frac{dr}{du} \cos u - r \sin u}; \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{r^2 + 2\left(\frac{dr}{du}\right)^2 - r \frac{d^2r}{du^2}}{\left(\frac{dr}{du} \cos u - r \sin u\right)^3}.$$

Mit Hilfe dieser Werthe verwandelt sich nun der Ausdruck für den Krümmungshalbmesser

$$\rho = \pm \frac{\left[1 + \left(\frac{d\,y}{d\,x}\right)^2\right]^{3/2}}{\frac{d^2 y}{dx^2}}$$

nach vorgenommener Reduction in:

$$\rho = \pm \frac{\left[r^2 + \left(\frac{dr}{du}\right)^2\right]^{3/2}}{r^2 + 2\left(\frac{dr}{du}\right)^2 - r\,\frac{d^2 r}{du^2}}.$$

In den bis nun abgeleiteten Ausdrücken ist immer die Voraussetzung festgehalten worden, dass der zu transformirende Ausdruck nicht mehr als zwei Veränderliche enthält. Die Aufgabe dieser Transformation wird nun im Wesentlichen auf demselben Wege gelöst, wenn mehr als zwei unabhängig Veränderliche vorhanden sind. Es seien beispielsweise x und y die unabhängig Veränderlichen, z eine Function hievon und die zu transformirende Gleichung durch

6) . . . . $F\left(x,\ y,\ z,\ \frac{dz}{dx},\ \frac{dz}{dy},\ \frac{d^2 z}{dx^2},\ \frac{d^2 z}{dy^2},\ \frac{d^2 z}{dx^2\,dy^2} \ldots .\right) = 0$

gegeben. Es sollen nun statt x und y die neuen Veränderlichen η, ξ eingeführt werden, welche mit jenen durch die Gleichungen

7) . . . . . $\varphi\,(x,\ y,\ \xi,\ \eta) = 0;\ \psi\,(x,\ y,\ \eta,\ \xi) = 0$

verbunden sind. Diese letzteren Gleichungen machen nun x und y zu Functionen von ξ und η, wodurch auch z von diesen neuen Veränderlichen abhängig wird. Es entsteht nun auch hier die Aufgabe, statt der einzelnen Differential-Quotienten $\frac{dz}{dx}$, $\frac{dz}{dy}$ etc. jene nach ξ und η genommen zu finden und sie in den gegebenen Ausdruck zu substituiren. Um zunächst den Quotienten $\frac{dz}{d\xi}$ abzuleiten, sei $\Delta\xi$ der, der neuen unabhängig Veränderlichen ξ ertheilte Zuwachs, welcher in η, x, y die Zunahmen $\Delta\eta$, Δx, Δy nach sich zieht. Aus der ursprünglichen Bedingungsgleichung

$$z = f\,(x, y)$$

folgt:

$$\Delta z = f(x + \Delta x,\ y + \Delta y) - f\,(x, y);$$

addirt und subtrahirt man im zweiten Theile die Grösse $f(x+\Delta x, y)$, so erhält man:

$$\Delta z = f(x+\Delta x, y) - f(x,y) + f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x+\Delta x, y);$$

folglich ist:

$$\frac{\Delta z}{d\xi} = \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x,y)}{\Delta \xi} + \frac{f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x+\Delta x, y)}{\Delta \xi};$$

endlich ist auch:

$$\frac{\Delta z}{\Delta \xi} = \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x,y)}{\Delta x} \cdot \frac{\Delta x}{\Delta \xi} + \\ + \frac{f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x+\Delta x, y)}{\Delta y} \cdot \frac{\Delta y}{\Delta \xi}.$$

Lässt man $\Delta\xi$ unendlich klein werden, so nehmen auch Δz, Δx, Δy unendlich ab; und es haben dann die Quotienten

$\frac{\Delta z}{\Delta \xi}, \frac{\Delta x}{\Delta \xi}, \frac{\Delta y}{\Delta \xi}$ die Differential-Quotienten $\frac{dz}{d\xi}, \frac{dx}{d\xi}, \frac{dy}{d\xi}$ zur Grenze.

Es ist ferner

$$\lim \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x,y)}{\Delta x} = \frac{df(x,y)}{dx} = \frac{dz}{dx},$$

das ist gleich dem Differential-Quotienten der Function $z = f(x,y)$, welche man erhält, wenn man bei der Differentiation blos x als unabhängig Veränderliche betrachtet, y aber als constant ansieht. Dies erhellt sogleich, wenn man erwägt, dass in der im Zähler stehenden Differenz $f(x+\Delta x, y) - f(x,y)$ blos x, nicht aber y eine Veränderung erlitten habe.

Aus demselben Grunde ist weiters:

$$\lim \frac{f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x+\Delta x, y)}{\Delta y} = \frac{d.f(x,y)}{dy} = \frac{dz}{dy},$$

der nach y genommene Differential-Quotient der Function $z = f(x,y)$ das heisst so genommen, als ob y eine unabhängig Veränderliche, x aber eine constante Grösse wäre.

Demzufolge wird also:

8) . . . . .
$$\begin{cases} \dfrac{dz}{d\xi} = \dfrac{dz}{dx} \cdot \dfrac{dx}{d\xi} + \dfrac{dz}{dy} \cdot \dfrac{dy}{d\xi}. \\ \text{Auf gleiche Weise findet man weiter:} \\ \dfrac{dz}{d\eta} = \dfrac{dz}{dx} \cdot \dfrac{dx}{d\eta} + \dfrac{dz}{dy} \cdot \dfrac{dy}{d\eta}. \end{cases}$$

Aus diesen Gleichungen werden die Werthe von $\frac{dz}{dx}$, $\frac{dz}{dy}$ gezogen und in die Gleichung 6 substituirt, während die noch in 8 erscheinenden Differential-Quotienten $\frac{dx}{d\xi}$, $\frac{dy}{d\xi}$, $\frac{dx}{d\eta}$, $\frac{dy}{d\eta}$ sich aus den Gleichungen 7 bestimmen lassen.

Werden die Gleichungen 8 abermals nach ξ und η differenzirt, mit Rücksicht, dass $\frac{dz}{dx}$, $\frac{dz}{dy}$ Functionen von x und y sind, und diese Grössen wieder von ξ und η abhängen, so erhält man:

$$\frac{d^2z}{d\xi^2} = \frac{d^2z}{dx^2}\left(\frac{dx}{d\xi}\right)^2 + 2\frac{d^2z}{dx\,dy}\frac{dx}{d\xi}\frac{dy}{d\xi} + \frac{d^2z}{dy^2}\left(\frac{dy}{d\xi}\right)^2 + \frac{dz}{dx}\frac{d^2x}{d\xi^2} + \frac{dz}{dy}\frac{d^2y}{d\xi^2};$$

$$\frac{d^2z}{d\xi\,d\eta} = \frac{d^2z}{dx^2}\frac{dx}{d\xi}\frac{dx}{d\eta} + \frac{d^2z}{dx\,dy}\left(\frac{dx}{d\xi}\frac{dy}{d\eta} + \frac{dx}{d\eta}\frac{dy}{d\xi}\right) +$$

$$+ \frac{d^2x}{dy^2}\frac{dy}{d\xi}\frac{dy}{d\eta} + \frac{dz}{dx}\frac{d^2x}{d\xi\,d\eta} + \frac{dz}{dy}\frac{d^2y}{d\xi\,d\eta};$$

$$\frac{d^2z}{d\eta^2} = \frac{d^2z}{dx^2}\left(\frac{dx}{d\eta}\right)^2 + 2\frac{d^2z}{dx\,dy}\frac{dx}{d\eta}\frac{dy}{d\eta} + \frac{d^2z}{dy^2}\left(\frac{dy}{d\eta}\right)^2 + \frac{dz}{dx}\frac{d^2x}{d\eta^2} + \frac{dz}{dy}\frac{d^2y}{d\eta^2};$$

welche die Gleichungen von $\frac{d^2z}{dx^2}$, $\frac{d^2z}{dx\,dy}$, $\frac{d^2z}{dy^2}$ darbieten; sie enthalten noch die Differential-Quotienten zweiter Ordnung von x und y nach ξ und η, welche sich wieder aus den Gleichungen 7 ergeben.

Wird dieser hier erläuterte Weg verfolgt, so gelangt man auch zu den Differential-Quotienten dritter und höherer Ordnung, wenn die transformirende Gleichung 6 deren enthalten sollte. Das Verfahren bleibt übrigens auch dann noch dasselbe, wenn die Function z von mehr als zwei Veränderlichen abhängt und ebenso viele neue unabhängige Variable eingeführt werden sollen.

Die hier erläuterten Transformationen finden ihre verbreitetste Anwendung bei der Untersuchung geometrischer Probleme, wenn hiebei von einem Coordinaten-System auf ein anderes übergangen werden soll. Der häufigste Fall ist der, dass die rechtwinkligen Coordinaten durch polare ausgedrückt werden sollen, welche mit jenen durch die Gleichungen

9) . . . $x = r\cos u,\ y = r\sin u\cos\omega,\ z = r\sin u\sin\omega$

verbunden sind. Es sei nun, um die Anwendung der Transformation für diesen Fall zu erläutern, angenommen, dass x, y im rechtwinkligen u, ω im polaren Coordinaten-System die unabhängig Veränderlichen

seien. Da z, als Function von x, y, zufolge der oberen Bedingungsgleichungen 9, auch von u und ω abhängt, so hat man:

$$\frac{dz}{du} = \frac{dz}{dx}\frac{dx}{du} + \frac{dz}{dy}\frac{dy}{du}, \quad \frac{dz}{d\omega} = \frac{dz}{dx}\frac{dx}{d\omega} + \frac{dz}{dy}\frac{dy}{d\omega};$$

bestimmt man hieraus $\frac{dz}{dx}$ und $\frac{dz}{dy}$ und setzt zur Abkürzung

$$\frac{dz}{du}\frac{dy}{d\omega} - \frac{dz}{d\omega}\frac{dy}{du} = P$$

$$\frac{dz}{d\omega}\frac{dx}{du} - \frac{dz}{du}\frac{dx}{d\omega} = Q$$

$$\frac{dx}{du}\frac{dy}{d\omega} - \frac{dx}{d\omega}\frac{dy}{du} = R,$$

so erhält man:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{P}{R}, \quad \frac{dz}{dy} = \frac{Q}{R}.$$

Durch Differentiation der Gleichungen 9 nach u und ω findet man aber:

$$\frac{dx}{du} = \frac{dr}{du}\cos u - r \sin u,$$

$$\frac{dy}{du} = \frac{dr}{du}\sin u \cos \omega + r \cos u \cos \omega,$$

$$\frac{dz}{du} = \frac{dr}{du}\sin u \sin \omega + r \cos u \sin \omega,$$

$$\frac{dz}{d\omega} = \frac{dr}{d\omega}\cos u,$$

$$\frac{dy}{d\omega} = \frac{dr}{d\omega}\sin u \cos \omega - r \sin u \sin \omega,$$

$$\frac{dz}{d\omega} = \frac{dr}{d\omega}\sin u \sin \omega + r \sin u \cos \omega.$$

Mit diesen Werthen ergibt sich nun nach vorgenommener Reduction:

$$P = -r \sin u \left(\frac{dr}{du}\sin u + r \cos u\right)$$

$$Q = r \sin u \cos \omega \left(\frac{dr}{du}\cos u - r \sin u\right) - r\frac{dr}{d\omega}\sin \omega$$

$$R = -r \sin u \sin \omega \left(\frac{dr}{du}\cos u - r \sin u\right) - r\frac{dr}{d\omega}\cos \omega.$$

Hiemit sind die Differential-Quotienten der ersten Ordnung $\frac{dz}{dx}$, $\frac{dz}{dy}$ durch die neuen Veränderlichen ausgedrückt, und gestatten nach deren

Einsetzung in den zu transformirenden Ausdruck die Uebertragung der Aufgabe in das neue Coordinaten-System. Eine nochmalige Differentiation der obigen Gleichungen würde jene der zweiten, dritten Ordnung darbieten. Ist zum Beispiele der Ausdruck

$$U = \sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2}$$

zu transformiren, so hat man:

$$U = \frac{1}{R}\sqrt{P^2 + Q^2 + R^2};$$

man findet nun nach gehöriger Reduction:

$$P^2 + Q^2 + R^2 = r^2\left\{\left[r^2 + \left(\frac{dr}{du}\right)^2\right]\sin u^2 + \left(\frac{dr}{d\omega}\right)^2\right\},$$

somit:

$$U = \frac{\sqrt{\left[r^2 + \left(\frac{dr}{du}\right)^2\right]\sin u^2 + \left(\frac{dr}{d\omega}\right)^2}}{\left(\frac{dr}{du}\cos u - r\sin u\right)\sin u\sin\omega + \frac{dr}{d\omega}\cos\omega}.$$

II.

Die Einführung neuer Veränderlichen und die damit zusammenhängende Transformation gegebener Ausdrücke spielt eine weit wichtigere und ausgedehntere Rolle in der Integralrechnung, indem hier in vielen Fällen lediglich eine schickliche Transformation zur Lösung der Aufgabe führt. So gehört es schon bei der Bestimmung allgemeiner Reductionsformeln zum Behufe der Integration zusammengesetzter Differential-Ausdrücke mit zur Regel, die gegebenen Ausdrücke durch Transformation auf andere bereits bekannte oder in letzter Linie auf die einfachen Integrations-Formen zurückzuführen, wenn nicht andere Mittel hiezu zu Gebote stehen.

Ist nämlich $\int F[f(x)]\,dx$ das vorgelegte Integral, so kann man $f(x) = z$ setzen und nunmehr z als die neue unabhängig Veränderliche ansehen. Wird dabei die Gleichung $f(x) = z$ auf x reducirt, welches ein Resultat von der Form $x = \varphi(z)$ liefert, so erhält man hieraus:

$$dx = \varphi^1(z)\,dz, \text{ folglich:}$$

$$\int F[f(x)]\,dx = \int f[\varphi(z)]\,\varphi^1(z)\,dz = \int \chi(z)\,dz.$$

Kann nun, was bei schicklicher Wahl der Function $f(x)$ häufig der Fall ist, das letztere Integral $\int \chi(z)\,dz = \Phi(z)$ gefunden werden, so ist damit auch das Vorgelegte bestimmt; denn man hat:

$$\int F[f(x)]\,dx = \int \chi(z)\,dz = \Phi(z) + C = \Phi[f(x)] + C.$$

Um das Verfahren an Beispielen zu erläutern, sei

$$y = \int \frac{dx}{a + bx} \text{ zu bestimmen.}$$

Setzt man $a + bx = z$, so folgt hieraus:

$$dx = \pm \frac{dz}{b},$$

folglich:

$$y = \pm \frac{1}{b} \int \frac{dz}{z} = \pm \frac{1}{b} lz + C;$$

und wenn man den Werth von z wiederherstellt:

$$\int \frac{dx}{a + bx} = \pm \frac{1}{b} l(a \pm bx) + C.$$

Ein anderer Fall sei:

$$y = \int \frac{dx}{a + bx^2};$$

wird gesetzt:

$x = z\sqrt{\frac{a}{b}}$, so wird $y = \frac{1}{\sqrt{ab}} \int \frac{dz}{1 + z^2} = \frac{1}{\sqrt{ab}}$ arc tang z,

somit

$$\int \frac{dx}{a + bx^2} = \frac{1}{\sqrt{ab}} \text{ arc tang } \sqrt{\frac{b}{a}} + C.$$

Setzt man in dieser Formel $b = 1$ und a^2 statt a, so folgt:

$$\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \text{ arc tang } \frac{x}{a} + C.$$

Die angedeutete Transformation bietet insbesondere bei der Integration der algebraischen irrationalen Differentiale ein bequemes Mittel der Lösung dar, indem es, einzelne Fälle ausgenommen, nur hiedurch gelingt, die Differentiale auf eine rationale Form zu bringen, oder auf eines der Fundamental-Integrale zu reduciren. Enthält hiebei das vorgelegte Differential nur die Wurzelgrösse $\sqrt[n]{a + bx}$, so wird dasselbe durch die Substitution

$$\sqrt[n]{a + bx} = z$$

rational; denn mittelst der aus dieser Relation folgenden Gleichungen

$$x = \frac{z^n - a}{b}, \quad dx = \frac{n z^{n-1} . z}{b}$$

wird auch x und dx rational durch z ausgedrückt. Ebenso kann jede Differential-Function, deren Irrationalität nur an der Anwesenheit der Wurzelgrösse $\sqrt{a + bx + cx^2}$ haftet, also von der Form

$$f(x, \sqrt{a + bx + cx^2})\, dx$$

ist, durch geeignete Substitutionen rational gemacht werden.

Nicht minder vortheilhaft kann diese Transformation bei der Integration goniometrischer und cyclometrischer Differentiale angewendet werden. Da alle goniometrischen Functionen sich durch irgend eine derselben algebraisch ausdrücken lassen, so wird ein Differential, welches nur solche Functionen enthält, eine algebraische Form annehmen, wenn man eine der darin erscheinenden Functionen einer neuen Veränderlichen z gleich setzt; so wird zum Beispiele mittelst der Substitution

$$\sin x = z, \quad \cos x = \sqrt{1 - z^2}, \quad dx = \frac{dz}{\sqrt{1 - z^2}}$$

das Integrale

$$J = \int \frac{dx}{\sin x + \cos x} = \int \frac{dz}{z\sqrt{1 - z^2} + 1 - z^2},$$

und kann nun leicht bestimmt werden; denn setzt man, um dieses wieder rational zu machen, $\sqrt{1 - z^2} = 1 - yz$, so verwandelt sich dasselbe in:

$$J = 2 \int \frac{dy}{1 + 2y - y^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\, l\, \frac{\sqrt{2} - 1 + y}{\sqrt{2} + 1 - y} + C,$$

und man hat somit, wenn man den Werth von

$$y = \frac{1 - \sqrt{1 - z^2}}{z} = \frac{1 - \cos x}{\sin x} = \text{tang } {}^1/_2 x$$

wiederherstellt:

$$J = \frac{1}{\sqrt{2}}\, \frac{\sqrt{2} - 1 + \text{tang } {}^1/_2 x}{\sqrt{2} + 1 - \text{tang } {}^1/_2 x} + C.$$

Die vorhin genannte Substitution kann man ebenso auch auf das häufig vorkommende Integral

$$\int \sin x^m \cos x^n\, dx$$

anwenden, wobei dann dasselbe die Form erhält:

$$\int z^m (1 - z^2)^{\frac{n-1}{2}}\, dz,$$

welches die Form des sogenannten binomischen Integrals ist, und somit nach bekannter Reductionsformel integrirt werden kann.

Ein Integral von der Form $\int f(z)\,dx$, wo z eine der cyclometrischen Functionen arc sin x, arc cos x, arc tang x etc. bezeichnet, lässt sich jederzeit auf ein goniometrisches zurückführen, wenn man arc sin x, arc cos x u. s. w. einer neuen Veränderlichen gleich setzt.

So wird mittelst der Substitution:

$$\text{arc sin } x = z,\quad x = \sin z,\quad dx = \cos z\,dz:$$

$$\int f(\text{arc sin } x)\,dx = \int f(z)\cos z\,dz;$$

für arc tang $x = z$, $x = \text{tang } z$, $dx = \sec z^2 dz$ wird:

$$\int f(\text{arc tang } x)\,dx = \int f(z)\sec z^2 dz \text{ u. s. w.}$$

Eine gleich ausgebreitete Anwendung der Einführung neuer Veränderlichen findet bei der Ausmittelung bestimmter Integrale statt. Ist nämlich

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

das vorgelegte Integral und setzt man

$$\psi(x) = z,$$

so folgt hieraus

$$x = \varphi(z) \text{ und } dx = \varphi^1(z)\,dz,$$

somit:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f\left[\varphi(z)\right]\varphi^1(z)\,dz = \int_\alpha^\beta \chi(z)\,dz,$$

wobei die neuen Grenzen α und β jene Werthe von z sein werden, welche den Werthen a und b entsprechen, also $\alpha = \psi(a)$, $\beta = \psi(b)$.

Um einige allgemeine Transformations-Formeln, welche sich durch Anwendung dieses Verfahrens ergeben, zu erläutern, sei zunächst in dem Integrale

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

$x = z + h$ gesetzt; für $x = a$ wird $z = a - h$,
für $x = b$ wird $z = b - h$,

somit:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{a-h}^{b-h} f(z+h)\,dz,$$

oder, wenn man $b + h$ statt b, und $a + h$ statt a schreibt und umkehrt:

$$\int_a^b f(z+h)\,dz = \int_{a+h}^{b+h} f(x)\,dx.$$

Die erste dieser beiden Gleichungen verwandelt sich für $h = a$ in:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_0^{b-a} f(a+z)\,dz,$$

eine Formel, mittelst welcher die untere Grenze auf Null gebracht wird. Setzt man in dieser letzten Gleichung in dem Integrale rechts

$z = y\,(b-a)$, so wird für $z = 0$, $y = 0$,
für $z = b - a$, $y = 1$,

somit wegen

$$dz = (b-a)\,dy:$$

$$\int_0^{b-a} f(a+z)\,dz = (b-a)\int_0^1 f[a+(b-a)\,y]\,dy,$$

das ist mit Rücksicht auf die vorhin gefundene Gleichung:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_0^{b-a} f(a+z)\,dz:$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)\int_0^1 f[a+(b-a)\,y]\,dy,$$

mittelst welcher Formel ein Integral mit beliebigen Grenzen in ein anderes mit den Grenzen 0 und 1 verwandelt wird.

Setzt man in diese Formel schliesslich

$$\frac{y}{1-y} = z,$$

woraus für $y = 0$, $z = 0$,
für $y = 1$, $z = \infty$ folgt,

so erhält man, da $y = \frac{z}{1+z}$, $dy = \frac{dz}{(1+z)^2}$ ist:

$$\int_0^1 f[a+(b-a)\,y]\,dy = \int_0^\infty f\left[a + \frac{(b-a)\,z}{1+z}\right]\frac{dz}{(1+z)^2},$$

folglich mit Rücksicht auf die Gleichung

$$\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)\int_0^1 f[a+(b-a)\,y]\,dy:$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = b-a\int_0^\infty f\left[\frac{a+bz}{1+z}\right]\frac{dz}{(1+z)^2}.$$

Dadurch ist das Integral mit beliebigen Grenzen in ein solches mit den Grenzen 0 und ∞ umgestaltet.

Bei der Anwendung dieser Transformationen kann es sich jedoch ereignen, dass die Gleichung $\psi(x) = z$ in ihrer Auflösung mehrere Werthe von x darbietet, weshalb denn die Frage entsteht, welcher von diesen Werthen in das vorliegende Integral zu setzen sei. Um den in diesem Falle einzuschlagenden Weg näher zu beleuchten, soll zunächst $z = \psi(x)$ als Gleichung einer ebenen Curve betrachtet werden. Sind nun

$$x = \varphi(z),\ x = \varphi_2(z),\ x = \varphi_3(z)\ \ldots\ .$$

die durch Umkehrung dieser Gleichung entstandenen Werthe von x in Function der Ordinate z, so ist einleuchtend, dass, wenn die Curve von $x = a$ bis $x = b$ nur steigt, oder nur fällt (in welchem Falle $\psi_1(x)$ innerhalb dieser Grenzwerthe von x sein Zeichen nicht ändert), einem jeden zwischen $z_1 = \psi(a)$ und $z_2 = \psi(b)$ liegenden Werthe von z nur ein reeller Werth von x entsprechen kann, und dieser ist dann in das Integrale zu setzen. Hat aber die Function $z = \psi(x)$ für einen zwischen $x = a = OA$ (Fig. 1) und $x = b = OB$ liegenden Werth von x, zum Beispiele $x = \alpha = OC$ ein Maximum oder ein Minimum, $CD = \psi(\alpha)$, so wird es zwischen $AM = z_1 = \psi(a)$ und $BN = z_2 = \psi(b)$ liegende Werthe von z geben, zum Beispiele $z = OP$, welchen zwei reelle Werthe von x Pm und Pn entsprechen. Sind nun diese beiden Werthe, wie dieselben aus der Auflösung der Gleichung $z = \psi(x)$ folgen, $x = \varphi_1(z)$, $x = \varphi_2(z)$, von denen der erste von $z = AM$ bis $z = CD$, der zweite von $z = CD$ bis $z = BN$ gelten mag, und zerlegt man das vorliegende Integral folgendermaassen:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^\alpha f(x)\,dx + \int_\alpha^b f(x)\,dx,$$

so wird man in dem ersten $x = \varphi_1(z)$, in dem zweiten $x = \varphi_2(z)$ zu substituiren haben, und hat dann:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{\psi(a)}^{\psi(\alpha)} f[\varphi_1(z)]\,\varphi'_1(z)\,dz + \int_{\psi(\alpha)}^{\psi(b)} f[\varphi_2(z)\,\varphi'_2(z)\,dz.$$

Wenn die Function $z = \psi(x)$ mehr als ein Maximum oder Minimum innerhalb der Integrationsgrenzen darbietet, so besteht der Vorgang nur in einer Wiederholung des eben dargestellten Verfahrens.

Als Erläuterung zu dem auseinandergesetzten Verfahren diene das Integrale:

$$\int_0^\infty f\left(\frac{b}{x}\right) dx,$$

wozu die Substitution:

$$ax + \frac{b}{x} = z$$

angewendet werden soll.

Für $x = +\sqrt{\frac{b}{a}}$ wird z ein Minimum $= 2\sqrt{ab}$; der einem Maximum entsprechende Werth $x = -\sqrt{\frac{b}{a}}$ kommt hier nicht in Betracht, da sich das Integrations-Intervall nur auf positive Werthe von x erstreckt.

Es ist demnach:

$$J = \int_0^\infty f\left(ax + \frac{b}{x}\right) dx = \int_0^{\sqrt{\frac{b}{a}}} f\left(a\,x + \frac{b}{x}\right) dx + \int_{\sqrt{\frac{b}{a}}}^0 f\left(a\,x + \frac{b}{x}\right) dx$$

zu setzen; durch Auflösung der eben genannten Bedingungsgleichung nach x erhält man ferner:

$$x = \frac{z \mp \sqrt{z^2 - 4ab}}{2a}.$$

Setzt man hierin: $x = 0$, so wird $z = \infty$, ebenso

$$x = \sqrt{\frac{b}{a}}, \qquad z = 2\sqrt{ab},$$

$$x = \infty \qquad\qquad z = \infty,$$

und es muss somit in dem ersten Integrale dem Werthe $z = \infty$ der Werth $x = 0$, im zweiten dagegen dem Werthe $z = \infty$ der Werth $x = \infty$ entsprechen, was nur dann stattfinden kann, wenn in das erste Integral der Werth von x mit dem oberen Zeichen, in das zweite jener mit dem unteren Zeichen eingeführt wird.

In diesem Falle erhält man:

$$J = \frac{1}{2a}\int_\infty^{2\sqrt{ab}} f(z)\left(1 - \frac{z}{\sqrt{z_2 - 4ab}}\right) dz + \frac{1}{2a}\int_{2\sqrt{ab}}^\infty f(z)\left(1 + \frac{z}{\sqrt{z_2 - 4ab}}\right) dz,$$

oder nach Vertauschung der Grenzen in dem ersten Integrale und nach vorgenommener Reduction:

$$J = \int_0^\infty f\left(ax + \frac{b}{x}\right) dx = \frac{1}{a}\int_{2\sqrt{ab}}^\infty f(z)\,\frac{z\,dz}{\sqrt{z^2 - 4ab}}.$$

Wenn man in das letztere Integral setzt:

$$\sqrt{z^2 - 4ab} = y, \text{ also } \frac{z\,dz}{\sqrt{z^2 - 4ab}} = dy, \; z = \sqrt{y^2 + 4ab},$$

wodurch sich übrigens die Grenzen in Bezug auf y in 0 reduciren, so erhält man:

$$\int_0^\infty f\left(ax + \frac{b}{x}\right) dx = \frac{1}{a}\int_0^\infty f\left(\sqrt{y^2 + 4ab}\right) dy.$$

Setzt man ferners hierin:

$$f\left(ax+\frac{b}{x}=F\left[\left(ax+\frac{b}{x}\right)^2-2ab\right]=F\left(a^2x^2+\frac{b^2}{x^2}\right),\right.$$

so ist im zweiten Theile

$$f\left(\sqrt{y^2+4ab}\right)=F\left[\left(\sqrt{y^2+4ab}\right)^2-2ab\right]=(y^2+2vb).$$

Deren Substitution ergibt schliesslich:

$$\int_0^\infty F\left(a^2x^2+\frac{b^2}{x^2}\right)dx=\frac{1}{a}\int_0^\infty F\,(y^2+2ab)\,dy.$$

Ein anderes Beispiel zu dem erläuterten Verfahren bietet das Integrale:

$$J=\int_0^{2\pi} f\,(a\cos x+b\sin x)\;dx,$$

wenn darin zur Umformung

$$a\cos x+b\sin x=z$$

gesetzt wird.

Als Bedingung des Maximums oder Minimums ergibt sich hieraus:

$$\text{tang}\,x=\frac{b}{a},$$

welcher Gleichung die Werthe $x=s,\ s+\pi,\ s+2\pi$ etc. entsprechen, wenn mit s der kleinste Bogen, dessen Tangente $\frac{b}{a}$ ist, bezeichnet wird. Im vorliegenden Falle kommen jedoch nur die beiden ersten Werthe in Betracht, weil nur sie innerhalb der Integrationsgrenzen liegen.

Es ist für den ersten:

$$z \text{ ein Maximum} = a\cos s+b\sin s=\sqrt{a^2+b^2}=k,$$

für den zweiten:

$$z \text{ ein Minimum} = -(a\cos s+b\sin s)=-\sqrt{a^2+b^2}=-k;$$

es ist sonach zu setzen:

$$J=\int_0^s f\,(z)\;dx+\int_s^{s+\pi} f\,(z)\;dx+\int_{s+\pi}^{2\pi} f\,(z)\;dx.$$

Um noch dx durch z auszudrücken, so ergibt sich aus der Gleichung:

$$a\cos x+b\sin x=z,$$

wenn man durch a dividirt und statt $\frac{b}{a}$ setzt tang s:

$$\cos x+\text{tang}\,s\sin x=\frac{z}{a}\text{ und }\cos(s-x)=\frac{\cos sz}{a},$$

und weil $a\cos s+b\sin s=k$ ist,

$$\text{also } \cos s + \frac{b}{a} \sin s = k, \quad \cos + \text{tang } s \sin s = \frac{k}{a}$$

$$\text{und } \cos s^2 + \sin s^2 = \frac{k \cos s}{a},$$

schliesslich

$$\cos (s - x) = \frac{z}{k},$$

woraus weiters

$$\sin (s - x) = \pm \frac{1}{k} \sqrt{k^2 - z^2}, \text{ und}$$

$$dx = \frac{dz}{k \sin (s - x)} = \pm \frac{dz}{\sqrt{k^2 - z^2}} \text{ folgt.}$$

Da nun $\sin (s - x)$ von $x = 0$ bis $x = s$ positiv, von $x = s$ bis $x = s + \pi$ negativ, von $x = s + \pi$ bis $x = 2\pi$ wieder positiv ist, so hat man für das erste und dritte Intervall das obere, für das zweite das untere Zeichen zu setzen, und erhält, weil

$$\begin{aligned} &\text{für } x = 0 \text{ und } = 2\pi: \quad z = a, \\ &\text{„ } \quad x = s \quad . \quad . \quad . \quad . \quad z = k, \\ &\text{„ } \quad x = s + \pi \quad . \quad . \quad . \quad z = -k \text{ wird,} \end{aligned}$$

$$J = \int_0^{2\pi} f(a \cos x + b \sin x)\, dx = 2 \int_{-k}^{+k} \frac{f(z)\, dz}{\sqrt{k^2 - z^2}}.$$

Dieses Integral erhält eine andere Form, wenn $z = k \sin \varphi$ gesetzt wird, wodurch sich die Grenzen nach φ in $-\pi/2$ und $+\pi/2$ verwandeln; man erhält dadurch:

$$\int_0^{2\pi} f(a \cos x + b \sin x)\, dx = 2 \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} f(k \sin \varphi)\, d\varphi,$$

$$\text{wobei } k = \sqrt{a^2 + b^2} \text{ ist.}$$

Um noch schliesslich einer Anwendung dieser Transformation des einfachen Integrals zu erwähnen, wie sie in der Geometrie bei der Rectification der Curven vorkommen, sei als Beispiel die Länge eines elliptischen Bogens angeführt. Heisst s die Länge eines solchen Bogens, welcher zwischen einem Punkte der Curve und einem unbestimmten Punkte liegt, dessen Abscisse x ist, so ist der Ausdruck des Differentials dieses Bogens:

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = dx \sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}},$$

$$\text{somit die gedachte Länge } s = \int_a^x dx \sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}}$$

zwischen den Abscissen x und a, oder auch

$$s = \int_b^y dy \sqrt{1 + \frac{dx^2}{dy^2}}$$

zwischen der Ordinate y und b.

Wird hierin der Winkel u eingeführt, welcher die grosse Achse mit dem Halbmesser des vorhin gedachten Punktes bildet, so wird die Ellipse durch die Gleichungen

$$x = a \cos u, \quad y = b \sin u = a\sqrt{1-\varepsilon^2} \sin u$$

bestimmt. Hieraus folgt:

$$dx = -a \sin u\, du, \quad dy = a\sqrt{1-\varepsilon^2} \cos u\, du,$$

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 = a^2 (1 - \varepsilon^2 \cos u^2)\, du^2; \quad ds = a\sqrt{1 - \varepsilon^2 \cos u^2}\, du.$$

Hiemit ergibt sich als Ausdruck für die Bogenlänge, vom Scheitel der grossen Achse an gezählt bis zu jenem Punkte der Curve, dessen Abscisse $x = a \cos u$ ist:

$$s = a \int_0^u \sqrt{1-\varepsilon^2 \cos u^2}\, du.$$

Nun ist:

$$\sqrt{1-\varepsilon^2 \cos u^2} = 1 - \frac{1}{2}\varepsilon^2 \cos u^2 - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\varepsilon^4 \cos u^4 - \frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{1}{6}\varepsilon^6 \cos u^6 - .$$

Ferner

$$2 \cos u^2 = \cos 2u + 1$$
$$8 \cos u^4 = \cos 4u + 4 \cos 2u + 3$$
$$32 \cos u^6 = \cos 6u + 6 \cos 4u + 15 \cos 2u + 10 \text{ etc.},$$

somit:

$$\sqrt{1-\varepsilon^2 \cos u^2} = A_0 - 2A_1 \cos 2u - 4A_2 \cos 4u - 6A_3 \cos 6u - \ldots$$

wo der Kürze halber

$$A_0 = 1 - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\varepsilon^2 - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2^3}3\varepsilon^4 - \frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{2^5}10\varepsilon^6 - \ldots$$

$$= 1 - \left(\frac{1}{2}\varepsilon\right)^2 - \frac{1}{3}\left(\frac{1.3}{2.4}\varepsilon^2\right)^2 - \frac{1}{5}\left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\varepsilon^3\right)^2 \ldots$$

$$2A_1 = \frac{1}{4}\varepsilon^2 + \frac{1}{2^4}\varepsilon^4 + \frac{15}{2^9}\varepsilon^6 + \ldots$$

$$4A_2 = \frac{1}{2^6}\varepsilon^4 + \frac{3}{2^8}\varepsilon^6 + \ldots$$

$$6A_3 = \frac{1}{2^9}\varepsilon^6 + \ldots$$

gesetzt ist. Hiemit erhält man:

$$s = \int_0^u (A_0\, du - 2A_1 \cos 2u - 4A_2 \cos 4u - 6A_3 \cos 6u - \ldots)$$

Das ist:

$$s = a\ (A_0 u - A_1 \sin 2u - A_2 \sin 4u - A_3 \sin 6u - \ldots)$$

Für $u = \frac{1}{2}\pi$ ergibt sich hieraus der elliptische Quadrant

$$Q = \frac{1}{2}\, a\pi \,.\, A_0.$$

Zur Transformation der Doppel-Integrale sei gewählt der allgemeine Ausdruck:

$$J = \int\int M dx\, dy = \int\int f\ (x,y)\ dx\,.\,dy.$$

Sollen hierin die beiden neuen Veränderlichen ξ, y eingeführt werden, die mit den ursprünglichen durch die Gleichungen

$$x = \varphi\ (\xi_1 \eta), \quad y = \varphi_1\ (\xi_1 \eta)$$

zusammenhängen, so hat man zunächst durch Substitution derselben in $f\ (x, y)$:

$$M = f\ (x,y) = F\ (\xi,\eta),$$

und es handelt sich nur noch, um $dx\ \ dy$ durch die neuen Variablen auszudrücken.

Wird nun vorausgesetzt, dass zuerst nach y integrirt werde, wobei man x als Constante zu betrachten hat, so erhält man durch Differentiation der oberen Gleichungen:

10) . . . . $0 = P d\xi + Q d\eta, \quad dy = P_1 d\xi + Q_1 d\eta,$

wobei P, Q, P_1, Q_1 Functionen von ξ und η sind.

Wird an Stelle von y η eingeführt, so ergibt sich durch Elimination von $d\xi$ aus den letzten Gleichungen:

$$-\frac{Q\,dy}{P} = \frac{dy - Q_1\,dy}{P_1},$$

$$dy = \frac{PQ_1 - P_1 Q}{P}\, d\eta = \frac{\Omega}{P}\ d\eta,$$

11) . . . wenn hiebei $PQ_1 - P_1 Q = \Omega$ gesetzt wird.

Dadurch verwandelt sich das gegebene Integrale in:

$$J = \int\int M \frac{\Omega}{P}\ d\eta\, dx,$$

und erscheint, wenn man sich y und ξ mittelst obiger Gleichungen eliminirt denkt, als Function von η und x, welche beide Veränderlichen als von einander unabhängig betrachtet werden müssen. In Folge dieses letzteren Umstandes liefert nun die Gleichung

$$x = \varphi\ (\xi, \eta)$$

durch Differentiation für den Werth

$$dx = P d\xi,$$

wodurch man schliesslich erhält:

$$J = \int\int F(\xi, \eta)\, \Omega\, d\xi\, d\eta.$$

Es versteht sich, dass man zu demselben Resultate gelangt, wenn eben ξ statt η an die Stelle von y getreten wäre, oder wenn die Integration zuerst nach x vorgenommen worden wäre. Die Grenzen, innerhalb welcher das neue Integrale zu nehmen ist, müssen in jedem speciellen Falle besonders ermittelt werden.

Auch hier findet diese Transformation Anwendung, wenn auf ein neues Coordinaten-System, zum Beispiele das polare, übergangen werden soll.

Aus den den Zusammenhang zwischen den ursprünglichen neuen Variablen darstellenden Gleichungen:

$$x = r \cos u, \quad y = r \sin u$$

erhält man, wenn die auf y bezügliche Integration zuerst gedacht wird,

$$y = x \operatorname{tang} u,$$

worin dann x als Constante zu betrachten ist.

Das oben genannte Integral übergeht somit in

$$J = \int\int f(x, x \operatorname{tang} u)\, dx\, x \sec u^2\, du.$$

Um ferner r an die Stelle von x zu bringen, wird $x = r \cos u$ eingeführt, wobei r als Variable, $\cos u$ dagegen als constant zu betrachten ist. Dies gibt:

$$J = \int\int f(r \cos u, \quad r \sin u) \cos u\, dr \quad \cos u \sec u^2\, du =$$

$$= \int\int f(r \cos u, r \sin u)\, r\, dr\, du,$$

oder bei umgekehrter Integration:

$$J = \int\int f(r \cos u \quad r \sin u)\, r\, du\, dr.$$

Es ist sonach bei dieser Transformation der Reihe nach x, y, $dx\, dy$ durch $r \cos u$, $r \sin u$, $r\, du\, dr$ zu ersetzen. Zur Erläuterung des geometrischen Sinnes derselben sei

$$z = f(x,y) \text{ als Fläche und } V = \int\int z\, dx\, dy$$

als Volumen betrachtet.

Es ist nun für die Grösse des Volumens offenbar gleichgiltig, ob die Grundfläche des letzteren in rechtwinkelige oder in anders ge-

formte Elemente zerlegt, so lange nur diese Elemente die Grundfläche und die darüber construirten Parallelopipede das gesuchte Volumen vollständig ausfüllen. Als eine solche Zerlegung im Polar-Coordinatensysteme ergibt sich, wenn sich r und u gleichzeitig ändern, die Theilung der Grundfläche durch concentrische Kreisbögen und die die Elemente abgrenzenden Radien. Dabei kann eines dieser Elemente $nn_1n_2n_3$ (Fig. 2) als ein Rechteck betrachtet werden, wobei dann $OL = x$, $Ln = y$, $On = r$, $\sphericalangle LOn = u$, $nn_3 = dr$, $nn_1 = r\,du$ und Fläche $nn_1n_2n_3 = r\,du\,dr$ ist. Durch Summirung der über den Flächenelementen construirten Parallelopipede entsteht nun das Volum, und es ist der Inhalt eines solchen Parallelopipedes:

$$z\,r\,du\,dr, \text{ folglich}$$

$$V = \int\int z\,r\,du\,dr,$$

ein Ausdruck, welcher mit dem transformirten und früher gefundenen übereinstimmt, wenn $z = f(x, y)$ und $f(r\cos u,\ r\sin u)$ wieder eingesetzt wird. Auch hier werden die Integralgrenzen besonders zu bestimmen sein. Sind die ursprünglichen Grenzen für x und y so beschaffen, dass ein Punkt xy innerhalb der Umgrenzung der Grundfläche bleibt, welcher von einer Geraden in höchstens zwei Puncten geschnitten werden kann, so ergeben sich die Integrationsgrenzen für r, wenn man den radius vector On bis zu seinem Durchschnitte Q_0 und Q_1 mit jener Umgrenzung verlängert, wonach dann die Grenzen für u die Winkel LOT_0 und LOT_1, welche zwei von O an die Umgrenzung gezogene Tangente mit der x-Achse einschliessen.

Für $OQ_0 = r_0$, $OQ_1 = R$, $\sphericalangle LOT_0 = u_0$ und $\sphericalangle LOT_1 = U$ ist dann:

$$V = \int_u^U \int_r^R f(r\cos u\ r\sin u)\,r\,du\,dr.$$

Beziehen sich, um das noch an einigen allgemeinen Fällen zu erläutern, die ursprünglichen Integrationen auf alle positiven x und y, welche der Bedingung $x^2 + y^2 \leqq c^2$ genügen, so bleibt der Punkt xy innerhalb eines mit dem Radius c beschriebenen Kreisquadranten, und man erhält:

$$\int_0^c \int_0^{\sqrt{c^2 - x^2}} f(xy)\,dx\,dy = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \int_0^c f(r\cos u\ r\sin u)\,r\,du\,dr.$$

Soll dagegen $(x - c)^2 + y^2 \leqq c^2$ sein, und x und y positiv, so bleibt der Punkt xy im Inneren eines Halbkreises, dessen Durchmesser auf der x-Achse liegt; für diesen Fall hat man:

$$\int_0^{2c}\int_0^{\sqrt{2cx-x^2}} f(xy)\,dx\,dy = \int_0^{\frac{1}{2}\pi}\int_0^{2c\cos u} f(r\cos u\ r\sin u)\,r\,du\,dr.$$

Speciell ist noch hiernach:

$$\int_0^{2c}\int_0^{\sqrt{2cx-x^2}} \frac{}{\sqrt{4c^2-x^2-y^2}}\,dx\,dy = \int_0^{\frac{1}{2}\pi}\int_0^{2c\cos u} \sqrt{4c^2-r^2}\,r\,du\,dr =$$

$$= \int_0^{\frac{1}{2}\pi} du\ \frac{1}{3}\,(2c)^3\,(1-\sin u)^3 = \frac{1}{3}\,(2c)^3\left(\frac{1}{2}\pi - \frac{2}{3}\right).$$

Beziehen sich endlich die ursprünglichen Integrationen auf alle positiven x und y, so liegt der Punkt in der ganzen unendlichen Ebene, welcher vor den positiven Theilen von x und y liegt, im Polarsystem sonach in jener Ebene, welche entsteht, wenn r von 0 bis ∞, dagegen u von 0 bis $\frac{1}{2}\pi$ ausgedehnt wird. Mithin ist dann:

$$\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} f(xy)\,dx\,dy = \int_0^{\frac{1}{2}\pi}\int_0^{\infty} f(r\cos u\ r\sin u)\,r\,du\,dr.$$

Als eine Anwendung der erläuterten Transformation mag noch zur Aufgabe gestellt sein, die allgemeine Complanations-Formel:

$$F = \int\int dx\,dy\sqrt{p^2+q^2+1}$$

auf Polar-Coordinaten zu übertragen, in welcher p und q die partiellen Differential-Quotienten von z nach x und y, gezogen aus der Gleichung der Fläche $z = f(x,y)$, bedeuten.

Bezeichnet nun r den radius vector eines Punktes dieser Fläche, u den Neigungswinkel desselben gegen die x-Achse, und U den Winkel, unter welchem die durch die genannte Achse und den radius vector gelegte Ebene der xy-Ebene begegnet, so hat man

$$x = r\cos u,\ y = r\sin u\cos U,\ z = r\sin u\sin U.$$

Durch Substitution dieser Werthe in die Function $\sqrt{p^2+q^2+1}$ erhält man, u und U als die unabhängig Veränderlichen betrachtend, mit Hilfe der im Eingange erörterten Transformations-Formeln:

$$\sqrt{p^2+q^2+1} = \frac{\sqrt{\left[r^2+\left(\frac{dr}{du}\right)^2\right]\sin u^2 + \left(\frac{dr}{du}\right)^2}}{\left(\frac{dr}{du}\cos u - r\sin u\right)\sin u\sin U + \frac{dr}{dU}\cos U}.$$

Werden die beiden ersten oberen Gleichungen differenzirt, so ergibt sich:

$$dx = \left(\frac{dr}{du}\cos u - r\sin u\right) du + \frac{dr}{dU}\cos u\, dU,$$

$$dy = \left(\frac{dr}{du}\sin u + r\cos u\right)\cos U\, du + \left(\frac{dr}{dU}\cos U - r\sin U\right)\sin u\, dU.$$

Mit Bezug auf die sub 10 11 angeführten Bezeichnungen erhält man sonach:

$$P = \frac{dr}{du}\cos u - r\sin u,\quad Q = \frac{dr}{dU}\cos u,$$

$$P_1 = \left(\frac{dr}{du}\sin u + r\cos u\right)\cos U,\ Q_1 = \left(\frac{dr}{dU}\cos U - r\sin U\right)\sin u,$$

somit

$$\Omega = -r\left\{\left(\frac{dr}{du}\cos u - r\sin u\right)\sin u\sin U + \frac{dr}{dU}\cos U\right\}.$$

Durch Substitution dieses Ausdruckes, in Verbindung mit dem obigen von $\sqrt{p^2+q^2+1}$ in die Gleichung 11, folgt dann

$$F = \int\int r\sqrt{\left[r^2+\left(\frac{dr}{du}\right)^2\right]\sin u^2 + \left(\frac{dr}{dU}\right)^2}\, du\, dU,$$

als Ausdruck des Flächeninhaltes in Polar-Coordinaten, welcher mit Vortheil angewendet werden kann, wenn die Polargleichung der Fläche einfacher ist, als jene bei rechtwinkligen Coordinaten. Dieser Ausdruck lässt sich übrigens auch durch die nachfolgende geometrische Betrachtung bestimmen.

Es sei (Fig. 3) M ein Punkt der Fläche $z = f(x, y)$, welchem die Polar-Coordinaten, wie früher genannt, r, u und U entsprechen. Legt man durch die x-Achse zwei Ebenen, welche gegen die xOy-Ebene unter den Winkeln U und $U + dU$ geneigt sind, denkt man sich ferner um Ox als Achse zwei Kreiskegel beschrieben, welche ihren Mittelpunkt in O haben und deren erzeugende Geraden mit der Ox beziehungsweise die Winkel u und $u + du$ einschliessen, und wird aus O als Mittelpunkt mit dem Halbmesser $OM = r$ eine Kugelfläche beschrieben, so wird von den genannten Ebenen und den zwei Kegelflächen auf der Fläche $z = f(x, y)$ das Flächenelement $MNPQ = dF$, auf der Kugelfläche aber das Flächenelement $Mnpq = dK$ ausgeschnitten. Nachdem beide als Rechtecke angesehen werden können, und dK als die Projection von dF auf die Kugelfläche genommen werden kann, so ist

$$dF = \frac{dK}{\lambda},$$

wenn λ den Neigungswinkel beider Flächenelemente, das ist den Winkel bezeichnet, welchen die Normale der Fläche im Punkte M mit dem radius vector OM einschliesst. Es ist aber dann

$dK = Mn \,.\, Mq$; $Mn = r\,du$, $Mq = MK\,dU = r \sin u \; dU$, also das Differential der Kugelfläche:

$$dK = r^2 \sin u \, du \, dU.$$

Bezeichnen ferner α, β, γ, α_1, β_1, γ_1 die Winkel, welche beziehungsweise der radius vector r und die erwähnte Normale mit den Achsen x, y, z einschliessen, so ist:

$$\cos\alpha = \frac{x}{r} = \cos u, \cos\beta = \frac{y}{r} = \sin u \cos U, \cos\gamma = \frac{z}{r} = \sin u \sin U,$$

$$\cos\alpha_1 = \frac{p}{\sqrt{p^2+q^2+1}}, \cos\beta_1 = \frac{q}{\sqrt{p^2+q^2+1}}, \cos\gamma_1 = -\frac{1}{\sqrt{p^2+q^2+1}},$$

$$\text{wobei } p = \frac{dz}{dx} \text{ und } q = \frac{dz}{dy} \text{ ist.}$$

Es folgt sonach:

$$\cos\lambda = \cos\alpha\cos\alpha_1 + \cos\beta\cos\beta_1 + \cos\gamma\cos\gamma_1 = \frac{p\cos u + q \sin u \cos U - \sin u \sin U}{\sqrt{p^2+q^2+1}}.$$

Werden die für p, q und $\sqrt{p^2+q^2+1}$ entwickelten Ausdrücke in die sub 9 entwickelten eingeführt, so verwandelt sich der letzte Ausdruck nach vorgenommener Reduction in:

$$\cos\lambda = \frac{r \sin u}{\sqrt{\left[r^2 + \left(\frac{dr}{du}\right)^2\right] \sin u^2 + \left(\frac{dr}{dU}\right)^2}},$$

und man erhält:

$$dF = r\,du\,dU \sqrt{\left[r^2 + \left(\frac{dr}{du}\right)^2 + \left(\frac{dr}{dU}\right)^2}$$

in Uebereinstimmung mit dem früher gefundenen Ergebniss.

Als ein besonderes Beispiel soll noch im Nachfolgenden die Bestimmung der Mantelfläche eines elliptischen Kegels angeführt werden (Fig. 4).

Wird die Spitze desselben im Ursprunge des rechtwinkligen Coordinaten-Systems, als Basis die Ellipse AB angenommen, welche im Abstande $OC = c$ parallel zur xy liegt, und deren Halbachsen $CA = a$, $CB = b$ in den Ebenen xz und yz liegen, so ist die Gleichung des Kegels:

$$\frac{z^2}{c^2} = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}.$$

Setzt man $x = a\xi$, $y = b\eta$, $z = c\zeta$, so verwandelt sich diese Gleichung in die einfachere:

$$\zeta = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}$$

und es wird:

$$p = \frac{dr}{dx} = \frac{c}{a}\,\frac{\xi}{\sqrt{\xi^2+\eta^2}},\quad q = \frac{dz}{dy} = \frac{c}{b}\,\frac{\eta}{\sqrt{\xi^2+\eta^2}},$$

welche Werthe in die allgemeine Complanations-Formel

$$\int_{x_0}^{x_1} dx \int_{y_0}^{y_1} dy\ \sqrt{p^2+q^2+1}$$

substituirt, für den vierten Theil der ganzen Kegelfläche den Ausdruck ergeben:

$$F = \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-\xi^2}} d\xi\, dy \sqrt{a^2b^2 + b^2c^2\frac{\xi^2}{\xi^2+\eta^2} + a^2c^2\frac{\eta^2}{\xi^2+\eta^2}}.$$

Zur Bestimmung der Integrations-Grenzen ist zu berücksichtigen, dass die Projection der Ellipse AB auf die Ebene xy die Ellipse ab ist, welcher die Gleichung $y = b\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}$ entspricht, wonach also von $x = 0$ bis $x = a$, und von $y = 0$ bis $y = b\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}$ zu integriren sein wird, welchen Grenzwerthen die Werthe $\xi = 0$, $\xi = 1$, $\eta = 0$ und $\eta = \sqrt{1-\xi^2}$ entsprechen.

Werden mittelst der Gleichungen

$$\xi = r\cos\varphi,\quad \eta = r\sin\varphi$$

die beiden neuen Veränderlichen r und φ eingeführt, so wird

$$d\xi = \cos\varphi\, dr - r\sin\varphi\, d\varphi,\ d\eta = \sin\varphi\, dr + r\cos\varphi\, d\varphi,$$

somit mit Rücksicht auf das anfangs bei der Transformation des allgemeinen Ausdruckes für Doppelintegrale Abgeleitete:

$$\Omega = r\cos\varphi^2 + r\sin\varphi^2 = r,$$

wonach das obige Integral übergeht in:

$$F = \int_0^1 \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sqrt{a^2b^2 + b^2c^2\cos\varphi^2 + a^2c^2\sin\varphi^2}\ \ r\, dr\, d\varphi.$$

Die Integration dieses Ausdruckes ergibt nun:

$$F = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{2}\pi} d\varphi\ \sqrt{a^2b^2 + b^2c^2\cos\varphi^2 + a^2c^2\sin\varphi^2},$$

oder wenn man $a^2b^2(\cos\varphi^2 + \sin\varphi^2)$ statt a^2b^2 einführt:

$$F = \frac{1}{2}\,ab\int_0^{\frac{1}{2}\pi} d\varphi\ \sqrt{m^2\cos\varphi^2 + n^2\sin\varphi^2},$$

wobei $a^2 + c^2 = m^2a^2$ und $b^2 + c^2 = n^2b^2$ gesetzt ist.

Dieser Ausdruck kann auch in folgender Form geschrieben werden:

$$F = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{ab}\,.\ m\ \sqrt{ab}\int_0^{\frac{1}{2}\pi} d\varphi\ \sqrt{1 - \frac{m^2-n^2}{m^2}\sin\varphi^2};$$

lässt man hierin $A = m\sqrt{a\,b}$, $B = n\sqrt{a\,b}$ die Halbachsen einer Ellipse sein, so ist deren Excentricität:

$$E^2 = \frac{A^2 - B^2}{A^2} = \frac{m^2 - n^2}{m^2},$$

und wird durch Einführung dieser Grössen

$$F = \frac{1}{2}\sqrt{a\,b}.\ A\int_0^{\frac{1}{2}\pi} d\varphi\,\sqrt{1 - E^2\sin\varphi^2},$$

welcher Ausdruck andeutet, dass die Mantelfläche des elliptischen Kegels gleich jener eines Cylinders ist, dessen Höhe $= \frac{1}{2}\sqrt{a\,b}$ und dessen Basis eine mit den Halbachsen $A = m\sqrt{a\,b}$ und $B = n\sqrt{a\,b}$ verzeichnete Ellipse ist.

Zur Erörterung der Transformation von dreifachen Integralen, wobei im Wesentlichen das gleiche Verfahren wie bei der Transformation von Doppelintegralen angewendet wird, sei gewählt der allgemeine Ausdruck:

$$J = \int\int\int M\,dx\,dy\,dz = \int\int\int f\,(x, y, z)\ dx\,dy\,dz,$$

in welchen die neuen Variablen ξ, η, ζ, in Zusammenhang stehend mit den ursprünglichen mittelst

$$x = \varphi\,(\xi, \eta, \zeta),\ y = \varphi_1\,(\xi, \eta, \zeta),\ z = \varphi_2\,(\xi, \eta, \zeta),$$

eingeführt werden sollen. Die Differentiation dieser Gleichungen ergibt zunächst:

$$\begin{aligned} dx &= P\ d\xi + Q\ d\eta + R\ d\zeta \\ dy &= P_1\ d\xi + Q_1\ d\eta + R_1\ d\zeta \\ dz &= P_2\ d\xi + Q_2\ d\eta + R_2\ d\zeta \end{aligned}$$

Wird nun angenommen, dass zuerst nach z integrirt wird, wobei dann x und y als constant zu betrachten sind, so hat man zur Bestimmung von dz die Gleichungen:

$$\begin{aligned} O &= P\ d\xi + Q\ d\eta + R\ d\zeta \\ O &= P_1\ d\xi + Q_1\ d\eta + R_1\ d\zeta \\ dz &= P_2\ d\xi + Q_2\ d\eta + R_2\ \zeta, \end{aligned}$$

aus welchen man durch Elimination von $d\xi$ und $d\eta$ findet

$$dz = \frac{\Omega\ d\zeta}{P Q_1 - P_1 Q},$$

wobei

$$\Omega = P_2\,(Q R_1 - P Q_1) + Q_2\,(R P_1 - P R_1) + R_2\,(P Q_1 - Q P_1)$$

gesetzt ist. Nach Substitution dieses Werthes von dz verwandelt sich das gegebene Integral in:

$$J = \int\int\int M \frac{\Omega}{PQ_1 - P_1 Q}\, dx\, dy\, d\zeta,$$

ausgedrückt in Function der von einander unabhängigen Veränderlichen x, y, ζ, wenn man sich in M, Ω und dem Binom $PQ_1 - P_1 Q$ die Grössen z, ξ, η mittelst der Bedingungsgleichungen eliminirt denkt.

Wird das zuletzt gefundene Integral zuerst nach y integrirt, wobei wieder x und ζ als constant anzusehen sind, und $dx = d\zeta = 0$ zu setzen ist, so übergehen die bezüglichen Gleichungen in:

$$0 = P\, d\xi + Q\, d\eta$$
$$dy = P_1\, d\xi + Q_1\, d\eta,$$

aus welchen durch Elimination von $d\xi$ folgt:

$$dy = \frac{PQ_1 - P_1 Q}{P}\, d\eta.$$

Durch Substitution hievon wird das Integral

$$J = \int\int\int M \frac{\Omega}{P}\, dx\, d\eta\, d\zeta,$$

welches nunmehr von den drei von einander als unabhängig zu betrachtenden Integralen x, η, ζ abhängt.

Wird endlich nach x integrirt, wobei η und ζ als constant, das ist $d\eta = d\zeta = 0$ ist, durch welche Bedingung sich die bezüglichen Gleichungen auf $dx = P\, d\xi$ reduciren, so erhält man schliesslich als transformirtes Integral:

$$J = \int\int\int M\, \Omega\, d\xi\, d\eta\, d\zeta,$$

worin M mittelst der ursprünglich angegebenen Gleichungen als Function von ξ, η, ζ auszudrücken ist.

Zur Erläuterung des Vorstehenden sei die am häufigsten vorkommende Transformation durch die Einführung von Polar-Coordinaten an dem das Volumen eines Körpers darstellenden Integrale:

$$V = \int\int\int dx\, dy\, dz$$

angeführt.

Sind die den Zusammenhang zwischen den ursprünglichen und den neuen Veränderlichen bestimmenden Gleichungen

$$x = r \cos u,\ y = r \sin u \cos U,\ z = r \sin u \sin U,$$

so ergibt deren Differentiation:

$$P = \cos u, \qquad Q = -r \sin u, \qquad R = 0$$
$$P_1 = \sin u \cos U, \; Q_1 = r \cos u \cos U, \; R_1 = -r \sin u \sin U$$
$$P_2 = \sin u \sin U, \; Q_2 = r \cos u \sin U, \; R_2 = r \sin u \cos U.$$

Mit diesen Werthen wird die Grösse

$$\Omega = r^2 \sin u$$

und folglich, da im vorliegenden Falle die Function $M = 1$ ist,

$$V = \int\int\int r^2 \sin u \; du \; dU \; dr$$

als Ausdruck für das Volumen eines Körpers, ausgedrückt in Polar-Coordinaten.

Auch lässt sich dieser Ausdruck auf geometrischem Wege finden.

Es sei (Fig. 5) M ein Punkt im Innern des Körpers, $OM = r$ der radius vector, $\sphericalangle MOx = u$ die Neigung desselben gegen die x-Achse, und $\sphericalangle MKM_1 = U$ der Winkel, den die durch den radius vector und die Achse der Ox gelegte Ebene mit der Ebene xOy bildet. Nimmt nun der radius vector r um das kleine Stück dr zu, und werden aus dem Pole O als dem Mittelpunkte zwei Kugeln beschrieben, so werden diese von der Ebene MOx in Kreisen geschnitten, welchen der radius vector in den Punkten M und m, ein zweiter in der Ebene MOx liegender und mit der Ox den Winkel $NOx = u + du$ bildender radius vector ON in den Punkten N und n begegnet. Hiedurch wird das in der Ebene MOx liegende unendlich kleine Viereck $MNmn$ gebildet, welches, wenn man sich die Ebene MOx um den unendlich kleinen Winkel $MKQ = dU$ gedreht denkt, den Körper Mp erzeugt, welcher ob der unendlich kleinen Dimensionen als Prisma betrachtet werden kann. Denkt man sich den ganzen Körper in solche Elemente zerlegt, deren Volumen dV das Product aus dem Rechtecke $MNPQ$ in die Höhe $Mm = dr$ ist, so erhält man, nachdem der Inhalt des genannten Rechteckes $= r^2 \sin u \, du \, dU$ ist, — weil $MN = r \, du$, $MQ = MK \, dU = r \sin u \, dU$ —, für das Differential des Volumens:

$$dV = r^2 \sin u \, du \; dU \; dr,$$

und als Volum selbst:

$$V = \int\int\int r^2 \sin u \; du \; dU \; dr.$$

In Betreff der Grenzen des gefundenen Ausdruckes ist zu unterscheiden, ob der Pol innerhalb oder ausserhalb des Körpers liegt. Im ersteren Falle ist die Integration zuerst nach r, und zwar von $r = 0$ bis $r = F(u, U)$ vorzunehmen, wobei die letztere Function durch

die Polargleichung der das Volumen begrenzenden krummen Fläche gegeben ist. Integrirt man dann von $u = 0$ bis $u = \pi$, und von $U = 0$ bis $U = 2\pi$, und zwar in beliebiger Ordnung, so ist hiemit das Integrale auf den ganzen Körper ausgedehnt.

Im andern Falle wird jedoch, wenn von einem begrenzten Volumen die Rede sein soll, jeder radius vector den Körper mindestens in zwei Punkten schneiden. Sind nun $r = F(u, U)$ und $r = F_1(u, U)$ die zwei diesen Durchschnittspunkten entsprechenden Werthe von r, sind ferner $\varphi(U)$ und $\varphi_1(U)$ zwei Functionen von U, endlich α und α_1 zwei gegebene, so erhält man offenbar, wenn man nach r von $r = F(u, U)$ bis $r = F_1(u, U)$, nach u von $u = \varphi(U)$ bis $u = \varphi_1(U)$, endlich nach U von $U = \alpha$ bis $U = \alpha_1$ integrirt, das Volumen eines Körpers, welcher begrenzt wird einerseits von zwei krummen Flächen, deren Gleichungen $r = F(u, U)$ und $r = F_1(u, U)$ sind, andererseits von zwei conischen Flächen, welche ihren Scheitel in O und die Ox zur gemeinschaftlichen Achse haben und durch die Gleichungen $u = \varphi(U)$ und $u = \varphi_1(U)$ dargestellt werden, endlich von zwei Ebenen, welche durch die Ox gehen, und mit der Ebene xOy, von welcher der Winkel U gezählt wird, die Winkel α und α_1 einschliessen.

Als Anwendung hievon diene noch das nachfolgende Beispiel.

Es sollen aus dem Mittelpunkte, als dem Pole des Coordinatensystems, zwei Kugeln von den Halbmessern a und a_1 beschrieben werden, und zwei gerade Kreiskegel, welche ihre Scheitel gleichfalls im Pole und die Ox zur gemeinschaftlichen Achse haben, und deren Erzeugende mit dieser Achse die Winkel β und β_1 einschliessen, sollen aus der Kugelfläche einen Ring herausschneiden, von welchem durch zwei durch Ox gelegte Ebenen, welche mit der Ebene xOy die Winkel α und α_1 bilden, ein Stück abgeschnitten wird, dessen Volumen zu berechnen ist.

Nachdem hier sämmtliche Grenzen constant sind, so ist zu integriren nach r von $r = a$ bis $r = a_1$, nach u von $u = \beta$ bis $u = \beta_1$, nach U von $U = \alpha$ bis $U = \alpha_1$, so dass also für das fragliche Volumen sich ergibt:

$$V = \int_{\beta}^{\beta_1} \int_{\alpha}^{\alpha_1} \int_{a}^{a_1} r^2 \sin u \, du \, dr \, dU,$$

das ist:

$$V = \frac{1}{3} (a_1^3 - a^3)(\alpha_1 - \alpha)(\cos\beta - \cos\beta_1).$$

Setzt man $a = 0$ und $\beta = 0$, in welchem Falle die innere Kegelfläche und die innere Kugel verschwinden, so wird

$$V = \frac{1}{3} a_1^3 (\alpha_1 - \alpha)(1 - \cos\beta)$$

der Ausdruck des zwischen den obenerwähnten Ebenen liegenden Theiles des Kugelausschnittes. Das Volum des ganzen Kugelausschnittes findet man daher,

$$\alpha = 0, \quad \alpha_1 = 2\pi$$

setzend:

$$V = \frac{2}{3}\pi a_1^3 (1 - \cos\beta) = \frac{4}{3}\pi a_1^3 \sin\frac{1}{2}\beta^2.$$

Für $\beta = 90^\circ$ geht der Ausschnitt in die halbe Kugel über, und der letzte Ausdruck verwandelt sich in:

$$V = \frac{2}{3}\pi a_1^3.$$

Druck von R. v. Waldheim.

Fig. 1

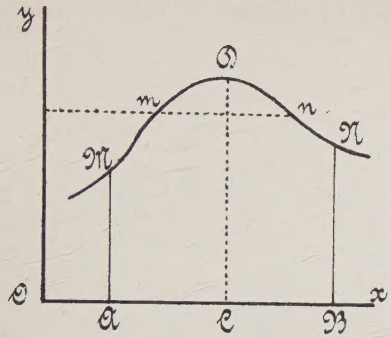

Fig. 2.

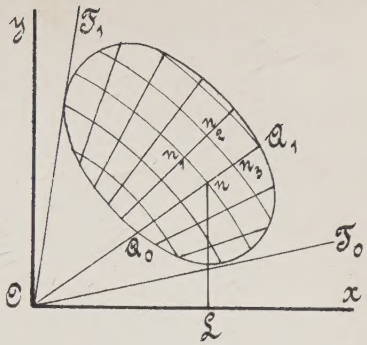

Fig. 3.

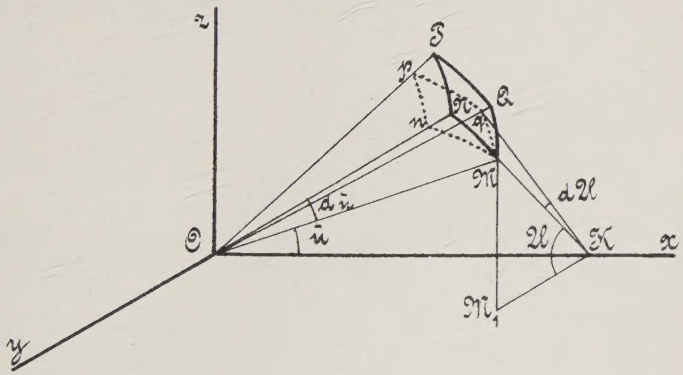

Fig. 4.

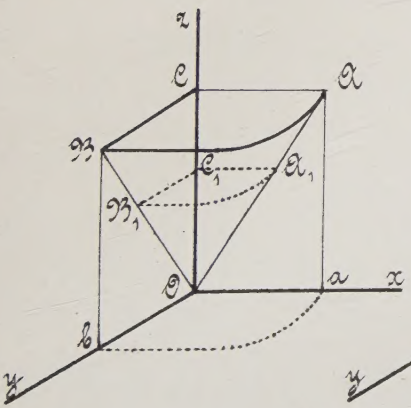
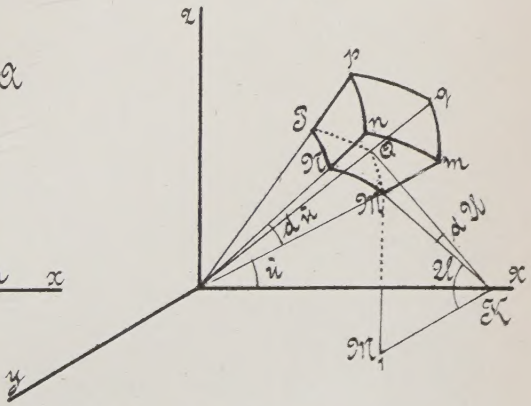
Fig. 5.